2de Hertentamen Functionaalanalyse, 2007–2008

Datum: 7 april 2008

Het tentamen is open boek; u mag al uw boeken en aantekeningen gebruiken. U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt.
Blijf niet eindeloos aan een onderdeel werken. Indien u een onderdeel niet kunt, ga dan gewoon verder en gebruik het resultaat (indien mogelijk).

1. Definieer de afbeelding $F : L^2[0,1] \to \mathbb{R}$ door

   $$F(f) := \int_0^1 t f(t) dt, \qquad f \in L^2[0,1].$$

   (a) Is F lineair? Rechtvaardig uw antwoord !

   (b) Toon aan dat F een begrensde operator is. Bepaal $\|F\|$.

   (c) Definieer F als hierboven, maar nu als een afbeelding $F : C([0,1]) \to \mathbb{R}$. Toon aan dat ook in dit geval F een begrensde operator is. ($C([0,1])$ is voorzien van de sup-norm.) Bepaal ook in dit geval $\|F\|$.

2. Beschouw een surjectieve begrensde operator

   $$T : X \to Y$$

   met X en Y genormeerde lineaire ruimtes. Neem aan dat er een constante $b > 0$ bestaat zodanig dat

   $$\|Tx\| \geq b\|x\|, \qquad \text{voor alle } x \in X$$

   Bewijs dat de inverse operator T^{-1} bestaat en begrensd is.

3. Beschouw de lineaire ruimte K van begrensde functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, voorzien van de sup-norm: $\|f\| := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$, met $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (a) Toon aan dat de sup-norm als boven een norm definieert op K.

   (b) Is K met deze norm een Banachruimte ?

   (c) Beschouw de tijdsvertragingsoperator $T : K \to K$ gedefineerd door

   $$(Tf)(t) = f(t - \Delta), \quad t \in \mathbb{R}$$

   met $\Delta > 0$ de (vaste) tijdsvertraging. Defineert T een lineaire begrensde operator van K naar K ? Zo ja, wat is de norm van T?

4. Definiëer de operator $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ door

   $$(Tf)(t) = \int_0^1 (t - s) f(s) ds$$

(a) Bewijs dat $\| T \| < 1$.

(b) Beschouw de integraalvergelijking

$$f(t) - \int_0^1 (t-s)f(s)ds = g(t), \quad t \in [0,1],$$

waar de functie g gegeven is. We zoeken naar oplossingen $f \in C([0,1])$ van deze integraalvergelijking. Toon aan dat deze integraalvergelijking een unieke oplossing $f \in C([0,1])$ heeft, die wordt gegeven door

$$f = (I-T)^{-1}g = \sum_{n=0}^{\infty} T^n g$$

(c) Bepaal de norm van de operator T.

Puntenverdeling:

1. a: 5, b: 8, c: 7.
2. a: 15.
3. a: 10, b: 10, c: 10.
4. a: 10, b: 10, c: 5.

   Gratis: 10, Totaal: 100